MATEMATIKA EKONOMI

FUNGSI EKSPONENSIAL DAN FUNGSI LOGARITMIK

TONI BAKHTIAR
INSTITUT PERTANIAN BOGOR

2012

Pangkat

- Jika suatu bilangan a dikalikan dirinya sendiri sebanyak n kali maka ditulis

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ kali}} = a^n$$

- Bilangan n disebut eksponen atau pangkat.
- Beberapa sifat:

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{n-m} = a^{n+(-m)} = a^n a^{-m} = a^n \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}$$

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

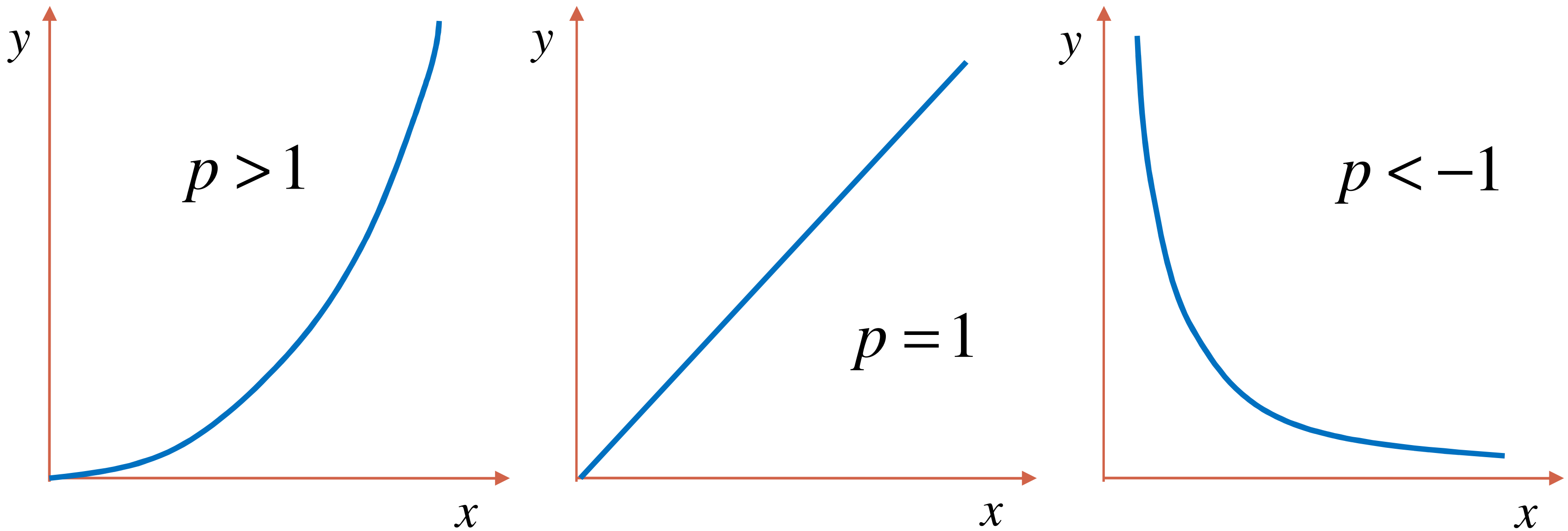
- Eksponen n dapat diperluas ke bilangan real.

Fungsi Pangkat

- Fungsi pangkat memiliki bentuk:

$$y := f(x) = kx^p$$

- Jika p = 1 maka f fungsi linear, jika p = 2 maka f fungsi kuadratik.
- Untuk x taknegatif, beberapa grafik fungsi f diberikan oleh:

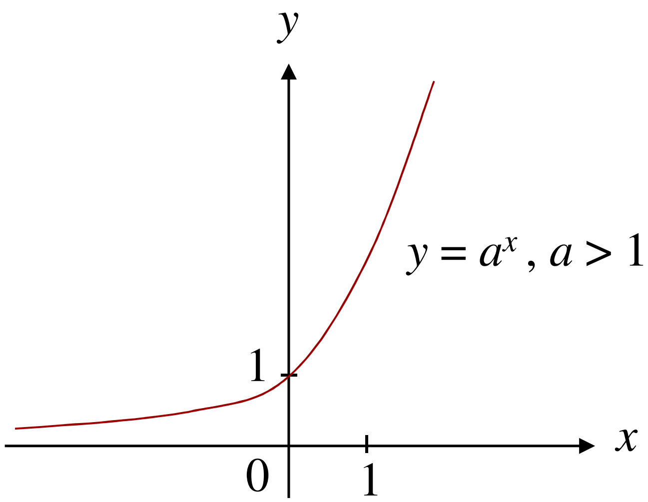


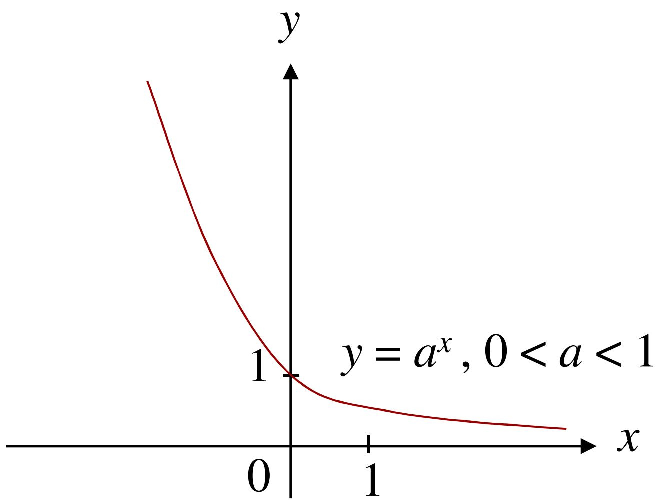
Fungsi Eksponensial

- Jika eksponen dipandang sebagai variabel dalam fungsi, maka diperoleh **fungsi eksponensial**:

$$f(x) = ka^x, \qquad a > 0.$$

- Bilangan k adalah koefisien dan a disebut **basis**.
- Untuk $k = 1$:





Fungsi Eksponensial Natural

- Di banyak aplikasi, basis *a* dipilih sama dengan *e* (bilangan natural), sehingga diperoleh **fungsi eksponensial natural**

$$f(x) = e^x$$

- e = 2. 7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274 ...
- Rekor: 10^{12} dijit, Shigeru Kondo & Alexander Yee (5 Juli 2010), 224 jam

Sejarah *e*

- Muncul pertama kali tidak secara eksplisit pada 1618 di sebuah tabel lampiran oleh John Napier.
- Jacob Bernoulli mencoba menghitung nilai konstanta tersebut menggunakan rumus:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

- Gottfried Leibniz dan Christiaan Huygens menggunakan konstanta tersebut, dilambangkan dengan *b*, pada 1690-1691.
- Pada 1727 Leonhard Euler menggunakan bilangan tersebut dan melambangkannya dengan *e*.

Berbagai Rumus *e*

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^{x}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

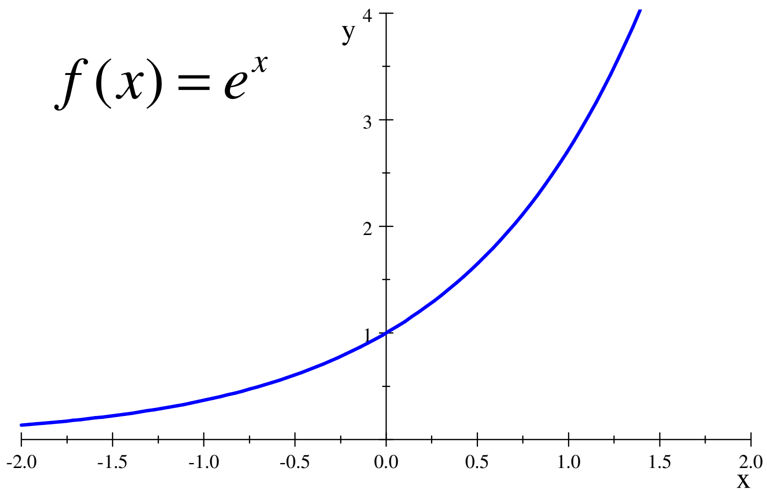
$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}$$

$$e = \lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$$

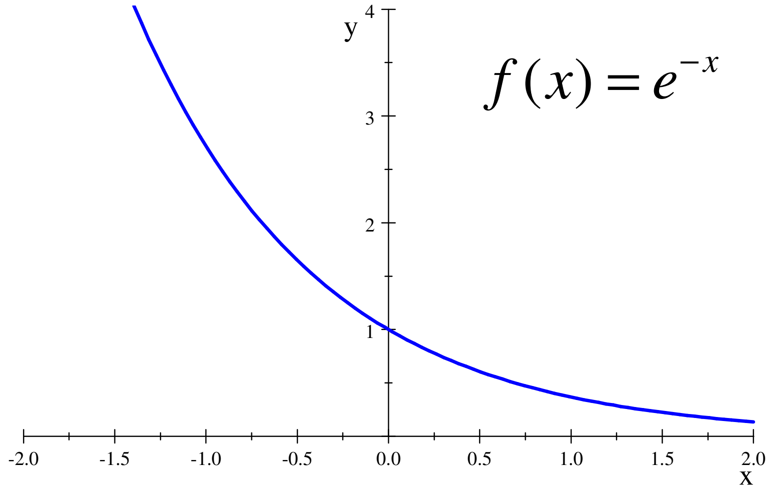
$$e = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Kurva Grafik

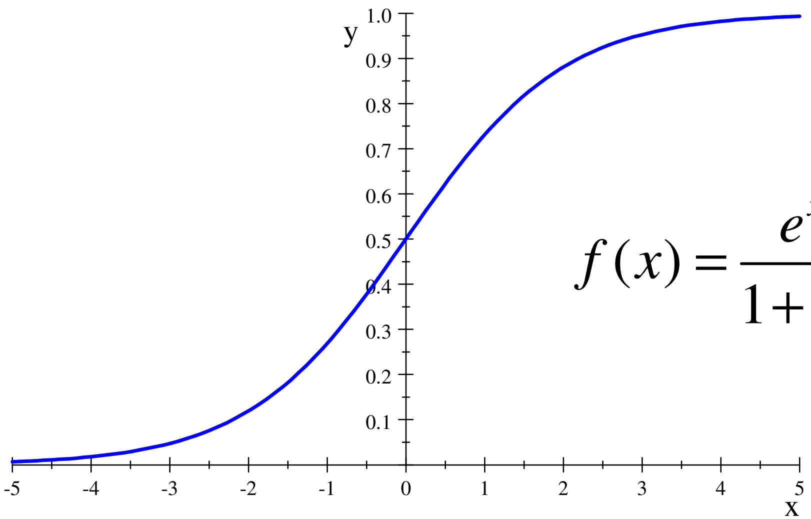
$$f(x) = e^{x}$$



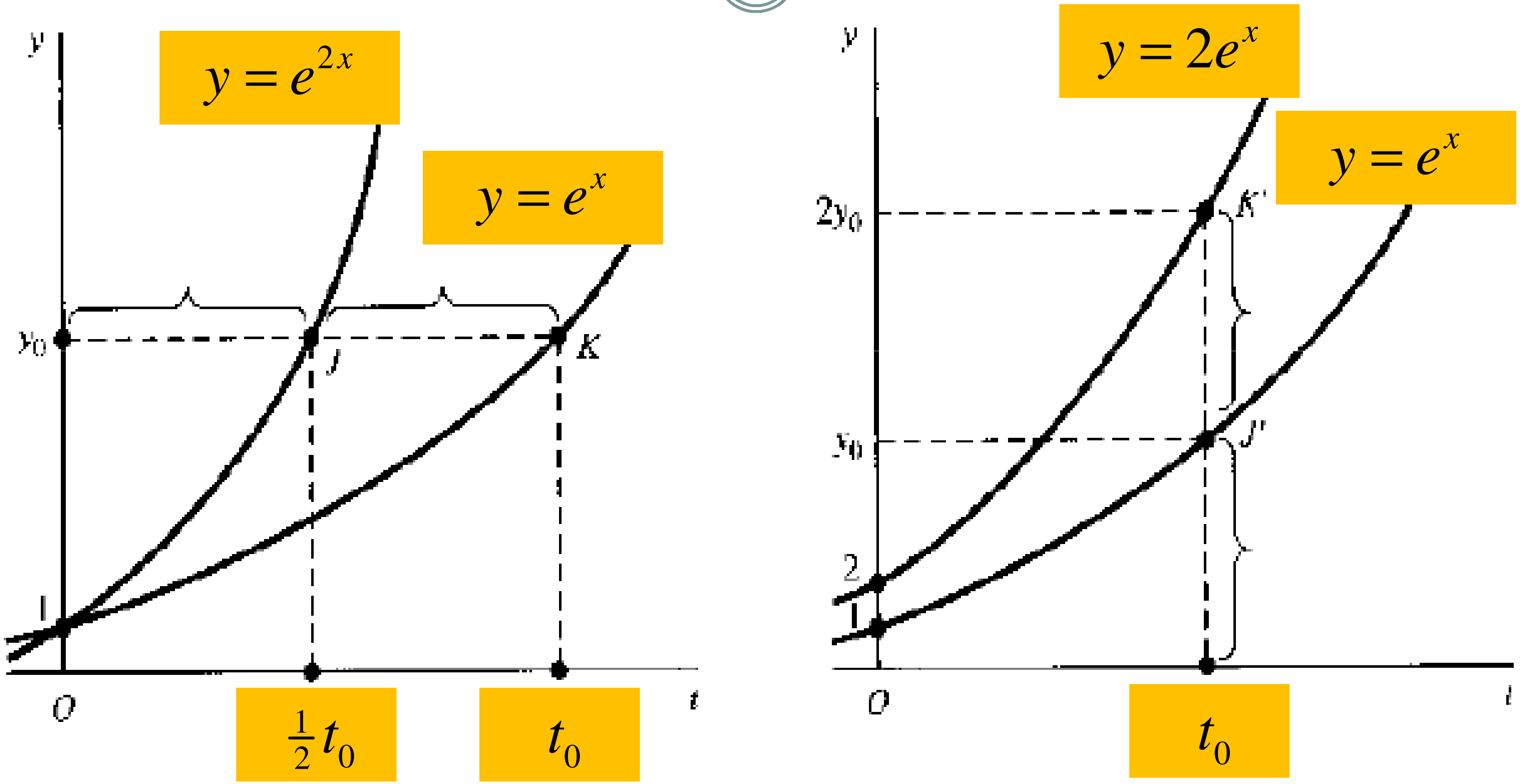
$$f(x) = e^{-x}$$



$$f(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$



Kurva Grafik



Interpretasi *e*

- Pokok A yang diinvestasikan pada tingkat bunga r per tahun akan bernilai V setelah t tahun, yaitu:

$$V = A(1+r)^t.$$

- Jika dalam satu tahun pokok dan bunga dibayarkan sebanyak m kali, maka pada periode m pokok A akan bernilai

$$V(m) = A(1+\tfrac{r}{m})^{mt}.$$

- Suku r/m menunjukkan bahwa di setiap periode dalam satu tahun, hanya $1/m$ bagian dari sukubunga r yang dibayarkan. Sedangkan eksponen mt menyatakan bahwa, karena bunga harus dibayarkan sebanyak m kali setahun maka ada sebanyak mt kali pembayaran dalam t tahun.

Interpretasi *e*

- Jika pokok dan bunga dibayarkan secara kontinu sepanjang tahun, yaitu m menjadi takhingga, maka diperoleh

$$\begin{aligned} V &= \lim_{m\to\infty} V(m) \\ &= A \lim_{m\to\infty} (1+\tfrac{r}{m})^{mt} \\ &= A \lim_{m\to\infty} [(1+\tfrac{1}{k})^{k}]^{rt}, \quad k := \tfrac{m}{r} \\ &= Ae^{rt}. \end{aligned}$$

- Jadi**, di ruang kontinu**, pokok A yang diinvestasikan dengan bunga r per tahun akan bernilai V setelah t tahun dengan

Diperoleh: $A = Ve^{-rt}$. e^{-rt} disebut faktor diskon.

$$V = Ae^{rt}.$$

Jika $A = 1$, $r = 100\%$, $t = 1$, maka $V = e$.

Fungsi Logaritmik

- Didefinisikan:

$$x = \log_b y \quad \Leftrightarrow \quad y = b^x.$$

- Contoh:

$$\begin{aligned}
\log_{10} 1{,}000 &= 3 && [\text{because } 10^3 = 1{,}000] \\
\log_{10} 100 &= 2 && [\text{because } 10^2 = 100] \\
\log_{10} 10 &= 1 && [\text{because } 10^1 = 10] \\
\log_{10} 1 &= 0 && [\text{because } 10^0 = 1] \\
\log_{10} 0.1 &= -1 && [\text{because } 10^{-1} = 0.1] \\
\log_{10} 0.01 &= -2 && [\text{because } 10^{-2} = 0.01]
\end{aligned}$$

Fungsi Logaritmik Natural

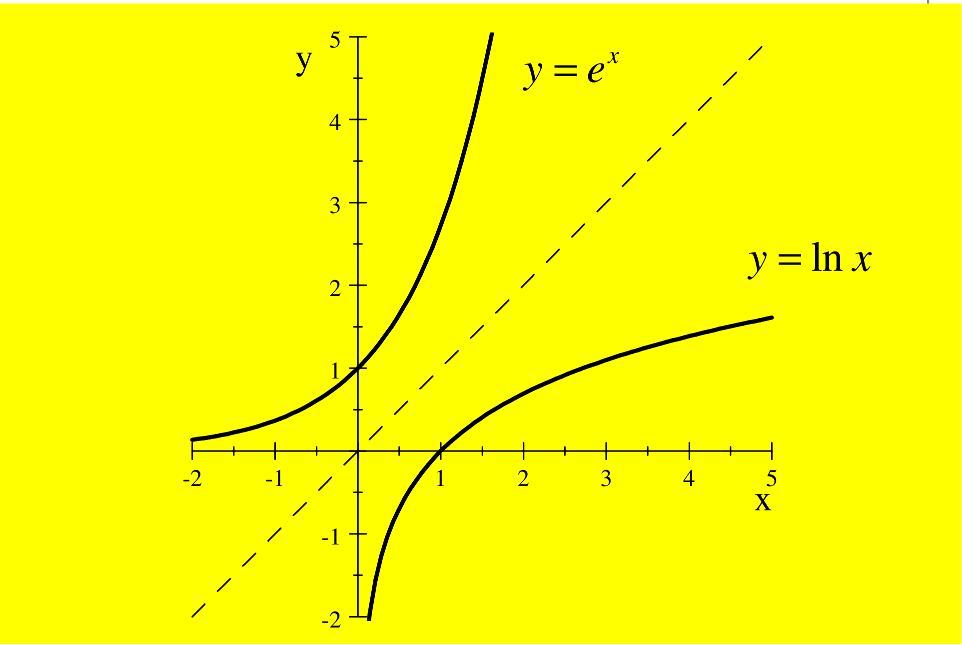
- Jika diambil basis $b = e$, maka

$$x = \log_e y = \ln y \quad \Leftrightarrow \quad y = e^x.$$

- Dapat ditulis juga

$$x = \ln y \quad \Leftrightarrow \quad y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{\ln y}.$$

- Terlihat bahwa fungsi eksponensial dan fungsi logaritmik saling invers.



Sifat-sifat Fungsi Logaritmik

$$\ln e = 1, \quad \ln 1 = 0,$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,$$

$$\ln a^b = b \ln a,$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a},$$

$$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b.$$

Terapan Logaritma

- **Penskalaan logaritmik**: penyajian data dalam skala logaritma seringkali bermanfaat apabila data memiliki range yang sangat besar (atau sangat kecil). **Contoh:** Skala Richter: log(energy), pH: –log(aktivitas ion hidronium).
- **Pelinearan**

Fungsi produksi Cobb-Douglas:

$$Y = \beta K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log Y = \log(\beta K^{\alpha} L^{1-\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \quad \log Y = \log \beta + \alpha \log K + (1-\alpha) \log L$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{Y} = \overline{\beta} + \alpha \overline{K} + (1-\alpha) \overline{L}.$$

Terapan Logaritma

- **Pelinearan** (regresi logistik):

$$P = \frac{e^{b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n}}{1 + e^{b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{P}{1-P} = e^{b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left[\frac{P}{1-P}\right] = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{logit}(P) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n.$$

Terapan Logaritma

- Menyelesaikan persamaan:

$$
\begin{aligned}
& ab^x - c = 0 \quad (a,b,c>0) \\
\Leftrightarrow \quad & ab^x = c \\
\Leftrightarrow \quad & b^x = \tfrac{c}{a} \\
\Leftrightarrow \quad & \ln b^x = \ln \tfrac{c}{a} \\
\Leftrightarrow \quad & x \ln b = \ln c - \ln a \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{\ln c - \ln a}{\ln b}.
\end{aligned}
$$

Turunan

- Turunan fungsi logaritmik:

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}.$$

- Secara umum dengan aturan rantai:

$$y = \ln g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

- Turunan fungsi eksponensial:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y = e^x.$$

- Secara umum:

$$y = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{g(x)} g'(x).$$

Penurunan Logaritmik

- Perhatikan bahwa:

$$y = f(x)g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \ln y = \ln f(x) + \ln g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} y' = \frac{1}{f(x)} f'(x) + \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left[\frac{1}{f(x)} f'(x) + \frac{1}{g(x)} g'(x)\right].$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln y = \ln f(x) - \ln g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} y' = \frac{1}{f(x)} f'(x) - \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left[\frac{1}{f(x)} f'(x) - \frac{1}{g(x)} g'(x)\right].$$

$$y = f(x)^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln y = g(x)\ln f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} y' = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)} f'(x)\right].$$

Penurunan Logaritmik

- **Contoh:** Tentukan dy/dx dari

$$y = x^2 e^{2x},$$

$$y = \frac{3\sin x}{(x^2+1)(2x-1)},$$

$$y = (x^2 + e^{2x})^{x^3 - x},$$

$$x^2 y - e^{2y} = \ln(x - y).$$

Terapan Ekonomi

- **Penyimpanan anggur:** Nilai penjualan anggur (*wine*) V setelah disimpan selama t tahun diberikan oleh

$$V(t) = Ke^{\sqrt{t}} e^{-rt},$$

dengan K konstanta dan r tingkat bunga. Tentukan t yang memaksimumkan V.

- **Pemanenan kayu:** Nilai penjualan kayu (*timber*) V setelah t tahun diberikan oleh

$$V(t) = 2^{\sqrt{t}} e^{-rt}.$$

Tentukan waktu pemanenan kayu yang memaksimumkan V.